Über im Endomorphismenringe einer abelschen Gruppe definierte unendliche Reihen und Produkte

Von I. GY. MAURER in Cluj (Rumänien)

1. Einleitung

Es sei G eine beliebige Abelsche Gruppe, $E(G)$ der volle Endomorphismenring von G. Die Elemente von G werden mit lateinischen, die Endomorphismen mit griechischen Buchstaben bezeichnet und die letzteren werden als rechtsseitige Operatoren verwendet.

Wir haben in einer früheren Arbeit [2] in dem Raum $E(G)$ eine Topologie auf Grund des folgendermaßen definierten Grenzbegriffs eingeführt:

Die unendliche Folge $\{\alpha_r\}$ von Endomorphismen $\alpha_r \in E(G)$ hat den Grenzwert $\alpha \in E(G)$, wenn für jedes Element $x \in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für alle $r > R_x$ die Gleichheit $x\alpha_r = x\alpha$ gilt. In diesem Falle heißt die Folge $\{\alpha_r\}$ konvergent und wir schreiben hierfür $\alpha_r \to \alpha$, sonst ist sie divergent. Der Endomorphismenring $E(G)$ ist also ein topologischer Ring bezüglich dieses Grenzbegriffs [2].

Wir bemerken, daß auch T. SZELE eine Topologie in $E(G)$ eingeführt hat [4]. Die von uns betrachtete Topologie ist „feiner" im folgenden Sinne: die abgeschlossene Hülle einer beliebigen Untermenge M von $E(G)$ in der Topologie von T. SZELE enthält als Untermenge die abgeschlossene Hülle von M in der von uns eingeführten Topologie. SZELE hat auch „unendliche Systeme" mit einer beliebigen Indexmenge statt unendlicher Folgen betrachtet und ihre Konvergenz untersucht. Im Falle der unendlichen Folgen — die spezielle „unendliche Systeme" sind — stimmt die Definition der Konvergenz von T. SZELE mit der obigen Definition der Konvergenz überein. Man kann also das folgende Ergebnis von T. SZELE gebrauchen:

Der topologische Ring $E(G)$ ist komplett. Dies bedeutet (in unserem Falle), daß wenn es für ein beliebiges Element $x \in G$ eine natürliche Zahl R_x derart gibt, daß $x(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}) = 0$ für alle $r_1, r_2 > R_x$ gilt, dann ist die Folge $\{\alpha_r\}$ konvergent. Es ist leicht zu sehen, daß jede konvergente Folge diesem Kriterium von CAUCHY genügt. Dieses ist also die notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz der in $E(G)$ definierten Folgen.

Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit mit unendlichen Reihen und unendlichen Produkten von Endomorphismen beschäftigen. T. SZELE hat sich auch mit der „Summabilität" der von ihm betrachteten „unendlichen Systemen" von Endomorphismen beschäftigt. Er hat ein Kriterium dafür angegeben, daß ein solches „unendliches System" summabel sei, das den Satz 1 aus dem § 2 dieser Arbeit als

Spezialfall enthält. Doch werden wir den Satz beweisen, denn im Falle der von uns betrachteten unendlichen Reihen ergibt sich das Konvergenzkriterium sehr leicht.

Ähnliche Untersuchungen haben L. ONOFRI [3] und J. GÁSPÁR [1] gemacht, die sich mit unendlichen Folgen und Produkten von unendlichen Permutationen und unendlichen monomialen Substitutionen beschäftigt haben.

2. Unendliche Reihen

Es sei die Folge $\{\sigma_r\}$ mit Hilfe der Folge $\{\alpha_r\}$ nach der Vorschrift $\sigma_r = \sigma_{r-1} + \alpha_{r-1}$ $(r=1, 2, \ldots)$ gebildet, wobei $\sigma_0=0$ ist. Wir nennen die Folge $\{\sigma_r\}$ die unendliche Reihe der Endomorphismen α_r und bezeichnen sie mit $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\alpha_r$, oder kurz mit $\Sigma\alpha_r$. Die Reihe $\Sigma\alpha_r$ heißt dann und nur dann konvergent, wenn die Folge $\{\sigma_r\}$ konvergent ist. Wenn $\sigma_r\to\sigma$ dann sagen wir, daß σ die Summe der Reihe $\Sigma\alpha_r$ ist: $\sigma=\Sigma\alpha_r$. Es gilt der folgende

Satz 1. *Die Reihe $\Sigma\alpha_r$ ist dann und nur dann konvergent, wenn $\{\alpha_r\}$ eine Nullfolge ist (also, wenn $\alpha_r\to 0$).*

Beweis. Wegen der Komplettheit des Raumes $E(G)$ ist die Reihe $\Sigma\alpha_r$ dann und nur dann konvergent, wenn für ein beliebiges $x\in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für $r>R_x$ und $p\geqq 0$ die Gleichheit $x(\sigma_{r+p}-\sigma_r) = 0$, also

$$x(\alpha_r+\ldots+\alpha_{r+p})=0 \tag{1}$$

gilt.

Es sei nun die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$ vorausgesetzt. Setzen wir in (1) $p=0$, so ergibt sich aus der Gleichheit (1), daß $x\alpha_r=0$ für alle $r>R_x$, d. h. $\alpha_r\to 0$. Die Bedingung ist also notwendig.

Umgekehrt, die Bedingung $\alpha_r\to 0$ bedeutet, daß für ein beliebiges $x\in G$ ein R_x existiert, so daß für $r>R_x$ die Gleichheit $x\alpha_r=0$ gilt. Also gilt für $r>R_x$ und für ein beliebiges $p\geqq 0$:

$$x\alpha_r=x\alpha_{r+1}=\ldots=x\alpha_{r+p}=0.$$

Daraus folgt (1), also die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$.

Man kann auf Grund dieses Satzes sehr leicht auf die folgenden Eigenschaften von konvergenten Reihen schließen:

1°. *Die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$ ist unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder.*

Beweis. Aus der Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r$ folgt die Existenz eines R_x so, dass die Gleichheit $x\alpha_r=0$ für $r>R_x$ mit einem beliebigen $x\in G$ gilt. Es sei $\Sigma\alpha_r'$ eine beliebige Umordnung der Reihe $\Sigma\alpha_r$, ferner seien $r_0, \ldots, r_{R_x}$ die Indizes der Elemente $\alpha_0, \ldots, \alpha_{R_x}$ in der umgeordneten Reihe $\Sigma\alpha_r'$ und $R_x'=\max(r_0, \ldots, r_{R_x})$. Wenn $r>R_x'(\geqq R_x)$, dann $x\alpha_r'=0$, also $\alpha_r'\to 0$. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r'$.

2°. *Wenn $\Sigma\alpha_r$ und $\Sigma\alpha_r'$ konvergente Reihen und σ und σ' ihre Summen sind, dann ist die Reihe $\Sigma(\alpha_r+\alpha_r')$ auch konvergent und ihre Summe ist gleich $\sigma+\sigma'$.*

Beweis. Es folgt aus der Konvergenz der Reihen $\Sigma\alpha_r$ bzw. $\Sigma\alpha'_r$, daß ein R_x bzw. R'_x existiert, so daß die Gleichheiten $x\alpha_r=0$ bzw. $x\alpha'_r=0$ $(x\in G)$ für $r>R_x$ bzw. $r>R'_x$ gelten. Es sei $r>\max(R_x, R'_x)=\overline{R}_x$. Dann gelten die Gleichheiten $x\alpha_r=0$ und $x\alpha'_r=0$ gleichzeitig. Daraus folgt $x(\alpha_r+\alpha'_r)=0$, also $\alpha_r+\alpha'_r\to 0$, d. h. die Konvergenz der Reihe $\Sigma(\alpha_r+\alpha'_r)$. Wenn wir nun die Gleichheiten

$$x(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{\overline{R}_x})=x\sigma,$$

$$x(\alpha'_0+\alpha'_1+\ldots+\alpha'_{\overline{R}_x})=x\sigma$$

addieren, so ergibt sich

$$x[(\alpha_0+\alpha'_0)+(\alpha_1+\alpha'_1)+\ldots+(\alpha_{\overline{R}_x}+\alpha'_{\overline{R}_x})]=x(\sigma+\sigma').$$

Daraus folgt der zweite Teil der Behauptung.

3°. *Wenn $\Sigma\alpha_r$ eine konvergente, $\Sigma\alpha'_r$ eine beliebige Reihe ist, dann ist $\Sigma\alpha_r\alpha'_r$ eine konvergente Reihe.*

Beweis. Nach der Annahme ist $\alpha_r\to 0$, also existiert für jedes $x\in G$ ein R_r mit $x\alpha_r=0$ für alle $r>R_x$. Dann gilt für $r>R_x$:

$$x\alpha_r\alpha'_r=(x\alpha_r)\alpha'_r=0\alpha'_r=0.$$

Es folgt $\alpha_r\alpha'_r\to 0$, also die Konvergenz der Reihe $\Sigma\alpha_r\alpha'_r$.

Wir bemerken, daß diese Eigenschaft auch in der zitierten Arbeit [4] von T. Szele enthalten ist.

Auf Grund des Satzes 1 ist die Bedingung, daß „das allgemeine Glied der Reihe gegen Null strebt", nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung der Konvergenz der Reihen. Es ist wohlbekannt, daß diese Eigenschaft z. B. in dem Körper der reellen Zahlen nicht gilt. Es scheint uns die folgende Frage interessant zu sein: welche sind diejenigen topologischen Eigenschaften eines Ringes, von denen die obige Eigenschaft der Reihen abhängt?

3. Unendliche Produkte

Es sei die Folge $\{\sigma_r\}$ mit Hilfe der Folge $\{\alpha_r\}$ nach der Vorschrift $\sigma_r=\sigma_{r-1}\cdot\alpha_{r-1}$ $(r=1, 2, \ldots)$ gebildet, wobei $\sigma_0=\varepsilon$ das Einheitselement des Ringes $E(G)$ bezeichnet. Das (unendliche) Produkt $\prod_{r=1}^{\infty}\alpha_r$ heißt dann und nur dann konvergent, wenn die Folge $\{\sigma_r\}$ konvergent ist. Wenn ferner $\sigma_r\to\sigma$, dann sagen wir, daß σ der Wert dieses Produktes ist: $\sigma=\Pi\alpha_r$.

Wir werden hier eine notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz des Produktes geben.

Satz 2. *Das Produkt $\Pi\alpha_r$ ist dann und nur dann konvergent, wenn für ein beliebiges Element $x\in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für $r>R_x$ die folgende Gleichheit gilt:*

$$(x\sigma_{R_x})\alpha_r=x\sigma_{R_x}.$$

Beweis. Aus der Definition der Konvergenz des Produktes $\Pi\alpha_r$ — wegen der Komplettheit von $E(G)$ — folgt, daß das Produkt $\Pi\alpha_r$ dann und nur dann konvergent ist, wenn für ein beliebiges $x \in G$ eine natürliche Zahl R_x existiert, so daß für $r_1, r_2 \geqq R_x$ die Gleichheit $x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = 0$, d. h.

$$x\sigma_{r_1} = x\sigma_{r_2} \tag{2}$$

gilt.

Es sei die Konvergenz des Produktes $\Pi\alpha_r$ vorausgesetzt. Wenn man r_1 und r_2 in (2) nacheinander durch $r_1 = R_x + 1$, $r_2 = R_x$; $r_1 = R_x + 2$, $r_2 = R_x + 1$; ... ersetzt und noch

$$\sigma_{R_x+p} = \sigma_{R_x+p-1} \cdot \alpha_{R_x+p} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

beachtet, so erhält man die folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned} x\sigma_{R_x+1} &= (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1} &&= x\sigma_{R_x}, \\ x\sigma_{R_x+2} &= (x\sigma_{R_x+1})\alpha_{R_x+2} &&= x\sigma_{R_x+1}, \\ &\;\;\vdots && \;\;\vdots \end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich leicht die folgenden:

$$\begin{aligned} (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1} &= x\sigma_{R_x} \\ (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+2} &= x\sigma_{R_x} \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

Also gilt für ein beliebiges $r > R_x$ die Gleichheit $(x\sigma_{R_x})\alpha_r = \sigma_{R_x}$. Die Bedingung ist also notwendig.

Sie ist auch hinreichend. Denn seien r_1 und r_2 mit $r_1, r_2 \geqq R_x$ gegeben. Dann ist r_1 von der Gestalt $r_1 = R_x + p$ und es ist leicht zu sehen, daß

$$\begin{aligned} x\sigma_{r_1} &= (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1}\alpha_{R_x+2}\ldots\alpha_{R_x+p} = \\ &= [(x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+1}]\alpha_{R_x+2}\ldots\alpha_{R_x+p} = \\ &= (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+2}\alpha_{R_x+3}\ldots\alpha_{R_x+p} = \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= [(x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+p-1}]\alpha_{R_x+p} = (x\sigma_{R_x})\alpha_{R_x+p} = x\sigma_{R_x}, \end{aligned}$$

d. h.

$$x\sigma_{r_1} = x\sigma_{R_x}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$x\sigma_{r_2} = x\sigma_{R_x}.$$

Aus diesen zwei Gleichheiten folgt

$$x(\sigma_{r_1} - \sigma_{r_2}) = x\sigma_{r_1} - x\sigma_{r_2} = x\sigma_{R_x} - x\sigma_{R_x} = (x - x)\sigma_{R_x} = 0\sigma_{R_x} = 0$$

und daraus die Konvergenz des Produktes $\Pi\alpha_r$.

Literatur

[1] J. GÁSPÁR, Über unendliche Produkte gewisser verallgemeinerter unendlicher Permutationsmatrizen, *Acta Bolyaiana,* 2 (1948), 1–6.
[2] I. GY. MAURER, Despre topologizarea inelelor (Sur la topologisation des anneaux), *Studii şi Cerc. de Mat. Acad. R. P. R., fil. Cluj,* 8 (1957), 177–180.
[3] L. ONOFRI, Teoria delle sostituzioni che operano su una infinita numerabile di elementi, *Annali di Mat.,* 4 (1927), 73–106.
[4] T. SZELE, On a topology in endomorphism rings of abelian groups, *Publicationes Math. Debrecen,* 5 (1957), 1–4.

(Eingegangen am 10. Mai 1960, umgearbeitet am 12. Mai 1961)

Errata

O. STEINFELD, Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen, *Acta Sci. Math.,* **22** (1961), 136–149.

	statt:	*richtig:*
S. 136, Zeile 1	Teilringe	Linksideale
S. 139, Zeile 1	Teilringe	Linksideale
S. 139, Zeile 10	Teilgruppen mit Nullelement	Linksideale
S. 139, Zeile 6 (von unten)	wo a_ω und b Absorbenten eines gegebenen Elementes von L sind.	wo b ein Absorbent eines gegebenen Elementes von L ist und die a_ω Absorbenten von b sind.